

# Een ezel stoot zich in het algemeen...

Reflectie naar aanleiding van de PME42 in Umeå, Zweden

In het onderwijs is er een aantal vragen die keer op keer gesteld (moeten) worden, ook al is de terminologie die gehanteerd wordt in de loop van de tijd net even anders en ligt het accent van de vraag net iets anders. In dit artikel worden enkele van dit soort vragen aangestipt naar aanleiding van het bezoek aan een conferentie. Het gaat om de vragen 'welk soort onderzoek naar wiskundeonderwijs is wenselijk?', 'Welke kwesties spelen er wanneer onderwijs geïndividualiseerd wordt?', 'Wat zou de focus van ons onderwijs moeten zijn?' en 'Wat leert ons onderwijs de leerlingen over de aard van wiskunde?'. Enkele van de 'oude' en tegelijkertijd actuele vragen, die te stellen zijn, zijn: 'Is de standaard die vaak gehanteerd wordt voor onderzoek, een beperking waardoor waardevolle vormen van onderzoek niet (langer) geaccepteerd worden?', 'Is het gesprek in klassen met digitale materialen waar iedere leerling met zijn eigen opdrachten bezig is, levendig of verstomt?', 'Valt het studenten op dat er bij opdrachten vaak alleen naar getallen als antwoord gevraagd wordt en er vragen uit de hogere lagen van de indeling van Bloom ontbreken?' en 'Op welke plaats van de ranglijst staat Nederland wereldwijd als het gaat om het waarderen van de kracht en schoonheid van de wiskunde?'

## INLEIDING

Van 3 tot 8 juli 2018 vond de jaarlijkse conferentie van de Psychology of Mathematics Education (PME) voor de 42e keer plaats. Dit jaar gebeurde dat in het Zweedse Umeå. Tijdens deze conferentie presenteren wetenschappers van over de hele wereld het meest recente onderzoek op het gebied van wiskundeonderwijs voor alle leeftijden. In dit artikel beschrijf ik een aantal van mijn gedachten tijdens het bijwonen van deze conferentie. Het is zeker geen overzicht van de belangrijkste bijdragen noch een 'samenvatting' van de grote lijnen in het huidige onderzoek. Ik stip slechts een aantal punten aan op basis van verschillende van elkaar los staande presentaties, die elk hun eigen thema hadden. De lezingen leiden tot enkele vragen die ik mijzelf stel. Ik hoop dat u als lezer een aantal vragen vanuit uw eigen praktijk, als leraar, als onderzoeker of als lerarenopleider, ook kunt stellen en wellicht zelfs beantwoorden. De vragen heb ik ingedeeld in de volgende vier thema's: de eisen die gesteld worden aan onderzoek door de lerarenopleiding basisonderwijs of door wetenschappelijke tijdschriften, de wens om aan te sluiten bij de individuele leerbehoefte van iedere leerling, de focus die het wiskundeonderwijs zou moeten hebben en welk beeld leerlingen krijgen over de aard van wiskunde door het volgen ons wiskundeonderwijs. Ieder thema zal ik inleiden met een verwijzing naar wat verschillende sprekers op de PME daarover hebben opgemerkt om vervolgens te beschrijven welke vragen dat bij mij oproept over het reken-wiskundeonderwijs. Daarbij stel ik mij deze vragen over zowel het basisonderwijs (met uitzondering van het eerste thema) als het opleidingsonderwijs.

Petra Hendrikse  
KPZ, Zwolle

Hendrikse, H.P. (2019). Een ezel stoot zich in het algemeen... Reflectie naar aanleiding van de PME42 in Umeå, Zweden. *Volgens Bartjens – ontwikkeling en onderzoek*, 38(4), 41-45

### RIGIDE OMGANG MET EISEN AAN PUBLICATIES

Plenaire lezingen vormen een geschikt medium om recente ideeën te vergelijken met ideeën die wat ouder zijn. Mijn bezoek aan de plenaire lezingen, maar ook aan een aantal paperpresentaties tijdens de PME hebben me opnieuw aan het denken gezet over recente ontwikkelingen in het reken-wiskundeonderwijs en het onderzoek in dit vakgebied. Dat geldt met name voor een plenaire lezing met als thema het standaardiseren van onderzoek met als aanleiding dat een flink aantal respectabele tijdschriften eisen voor publicatie stelt die dit in de hand werken. Dergelijke tijdschriften eisen de volgende onderdelen in een artikel: het beschrijven van een theoretisch kader, een methode waarin het liefst kwantitatieve analyses zijn opgenomen en waarin verantwoording voor keuzes wordt gegeven, resultaten en een conclusie en discussie waarin de zwakheden van de studie worden benoemd en een antwoord op de onderzoeksvraag wordt gegeven. De teneur van het betoog was dat indien deze eisen in het verleden gehanteerd zouden zijn, verschillende artikelen die inmiddels bekend zijn als klassiekers en die bepalend waren voor het denken in de periode erna, nooit gepubliceerd zouden zijn. Tijdens de conferentie pleitte Niss (2018) daarom in zijn plenaire bijdrage om niet al te rigide aan deze ‘eisen aan onderzoek’ te hangen.

Ik vind dit een interessante zienswijze, die ik gelijk verbond met discussies rondom onderzoek in de lerarenopleiding basisonderwijs. Op de lerarenopleiding waar ik werkzaam ben, de KPZ in Zwolle, worden onderzoeken die niet voldoen aan eerder genoemde eisen met een onvoldoende beoordeeld. Zo is bijvoorbeeld een studie, waarbij zonder theorie ingegaan wordt op de ontwikkeling van slechts één leerling, niet toegestaan. Ik realiseerde me dat de in de plenaire lezing genoemde smaakmakende klassiekers, op de KPZ tot een onvoldoende voor de student zouden leiden. Ik vraag me af of we de eisen die we stellen aan afstudeeronderzoek moeten herzien.

### AANSLUITEN BIJ DE INDIVIDUELE LEERLING

Omdat ik benieuwd was naar de aangehaalde, maar voor mij onbekende klassiekers, besloot ik deze te lezen om mij een beeld te vormen van het onderzoek dat wij onze studenten wellicht ten onrechte onthouden. Hier ga ik in op één van de genoemde klassiekers, waar Niss ook tijdens zijn lezing bij stil stond. Deze klassieker zal bij een aantal lezers bekend zijn, maar zeker niet bij iedere lezer. Het is een studie waarbij, volgens Niss, zonder theorie op de ontwikkeling van één leerling wordt ingegaan. Ik diep het voorbeeld hier nog wat verder uit dan Niss in zijn lezing deed. Dit doe ik om een dubbele reden. Niet alleen vind ook ik het een waardevol artikel dat terecht gepubliceerd is, maar volgens mij is het nog altijd actueel.

Het volgende fragment kwam in de lezing van Niss naar voren. Voor ik het fragment toelicht, vraag ik de lezer te bedenken of het hierbij gaat om een (a) citaat van Niss (en dus uit 2018), of (b) door Niss aangehaald citaat (uit 1973):

*‘The insistence in IPI (individually prescribed instruction) that the objectives in mathematics be defined in precise behavioral terms has produced a narrowly prescribed mathematics program with a corresponding testing program that rewards correct answers only regardless of how they were obtained, thus allowing undesirable concepts to develop. The material is largely in programmed form and the pupil learns through independent study at his own rate.’ (p. 25)*

Een term als IPI zal wellicht verraden dat het hier gaat om een aangehaald citaat uit 1973. Echter, zinsneden als ‘rewards correct answers only’ en ‘the pupil learns through independent study’, zouden zomaar uit teksten over vormen van hedendaags reken-wiskundeonderwijs kunnen komen. Dit citaat komt uit een artikel van Erlwanger (1973), wat gaat over het leren rekenen van de leerling Benny. Dit artikel wordt als klassieker beschouwd. Het gaat in op een streven uit die tijd om educatieve software te ontwerpen, die maximaal adaptief is afgestemd op de behoeften van het individu (Lindvall en Cox, 1970, p. 34). Erlwanger stelt dat de casus van Benny laat zien dat het concept van individualisering uit de IPI wiskunde geen succes verhaal is. Hij concludeert (p.12): ‘Benny’s case indicates that a “mastery of content and skill” does not imply understanding. This suggests than an emphasis on instructional objectives and assessment procedures alone may not guarantee an appropriate learning experience for some pupils.’ In andere woorden Erlwanger poneert hier dat geïndividualiseerde opdrachten op basis van te verwerven kennisdoelen en vaardigheden niet automatisch leiden tot begrip. Dit maakt dat ik me afvraag in hoeverre de conclusie over de effecten van hedendaags doelgericht onderwijs in een soort gelijke studie, hiervan zou afwijken.

Volgens Erlwanger stellen Lindvall en Cox dat de vrijgekomen tijd door de onderwijzer gebruikt zou moeten worden voor frequente gesprekjes tussen leraar en leerling. Dat staat echter haaks op het achterliggende doel van het instructieprogramma, namelijk dat de leerling onafhankelijk, zelf-gestuurd, studeert. Erlwanger concludeert daarom dat “there is never any reason for Benny to participate in a discussion with either his teacher or his peers about what he has learned and what his views are about mathematics.” (p.13). De situatie die Erlwanger beschrijft, is er een waarin een leerling individueel werkt aan opgaven

die passen in zijn eigen zone van naaste ontwikkeling, waarbij zijn medeleerlingen over het algemeen werken aan andere opgaven. Het gesprek met medeleerlingen en leraar is verstomt, mede omdat Benny de noodzaak van het gesprek niet ervaart.

Bovenstaande beschouwing komt uit de jaren 70 van de vorige eeuw, bijna 50 jaar geleden. Je zou denken dat dit allang niet meer actueel is. Maar niets is minder waar. Nog altijd wordt in bewoordingen als die Erlwanger gebruikt lesmateriaal aangeprezen. Anders dan in de zeventiger jaren verbinden ontwikkelaars van digitale materialen nogal eens woorden als zelfsturing en eigen niveau met het door hen bedoelde leren. Wat uit deze oude bronnen naar voren komt doet me ook denken aan wat ik lees in dit kader over gepersonaliseerd leren. Zo schrijft Exova, de uitgever van math, een digitale rekenmethode, over haar visie: 'De ontwikkeling van ieder kind afzonderlijk staat centraal. De leerling is eigenaar van zijn/haar eigen leren en kan zich in eigen tempo en op eigen niveau ontwikkelen. De leerkracht wordt hierbij niet minder belangrijk. Hij/zij ondersteunt de leerprocessen (Leren Leren) in de rol van coach, friendly mediator en teacher en geeft de leerlingen het vertrouwen in eigen kunnen.' (Exova, 2018).

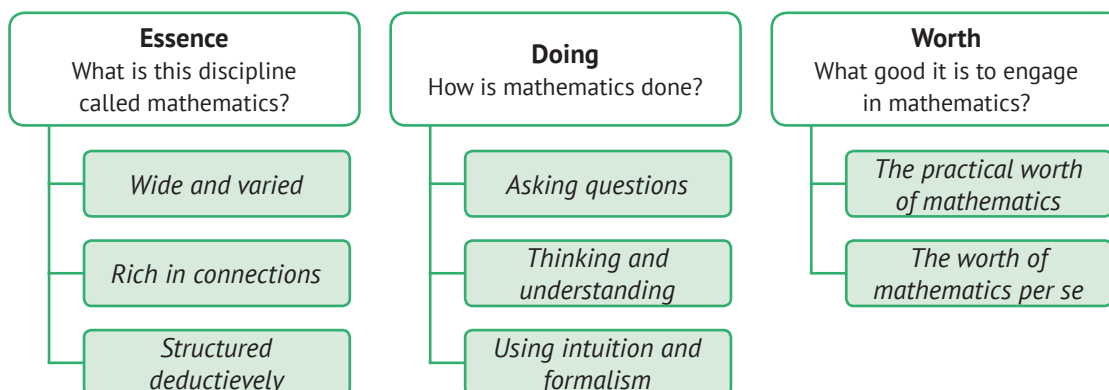
Zijn we terug bij waar we in 1973 waren of heeft men geleerd van de ervaringen in 1973 en is gepersonaliseerd leren echt iets anders als IPI? Ervaren hedendaagse leerlingen wel een behoefte om met elkaar of de leraar in gesprek te gaan of beleven zij het onderwijs niet veel anders dan Benny aan het eind van de vorige eeuw? Is het gesprek in klassen met digitale materialen waar iedere leerling met zijn eigen opdrachten bezig is levendig of verstomt? Hoe richten de leraren hun instructie in als leerlingen in een verschillend tempo werken of is de instructie ook gedigitaliseerd? In hoeverre levert de instructie in dit laatste geval inzicht op?

### DE FOCUS IN HET ONDERWIJS

Erlwanger bekritiseert in zijn artikel het reken-wiskundeonderwijs van zijn tijd in de Verenigde Staten. We gaven al aan dat hij zich verzet tegen het individualiseren. Een tweede punt van kritiek dat hij formuleert, betreft de focus in het wiskundeonderwijs. Boston (2012) geeft aan dat onderwijs kwaliteit heeft, als de focus niet op het produceren van juiste antwoorden ligt, maar op het ontwikkelen van wiskundig begrip. Erlwanger waarschuwt dat bij IPI 'the questions often require filling in blanks or selecting a correct answer. Therefore, this mode of instruction places an emphasis on answers rather than on the mathematical processes involved.' (p. 15). Dat invullen van het juiste getal in een antwoordvak, zien we tegenwoordig in de huidige digitale methoden. De kritiek die in 1973 geformuleerd werd, past onverkort bij deze digitale methoden. Wat dit betreft kan de kritiek die er in 1973 was, zo overgenomen worden. Zien mijn eigen studenten de noodzaak om naar meer te kijken dan alleen of een eindantwoord correct is? Als ik in afstudeerverslagen lees dat zij schrijven dat een voordeel van een digitale methode is dat die direct nakijkt, zodat zij dat niet meer hoeven te doen, dan vraag ik me dat af. Hoe krijgen mijn studenten zicht op in welke mate hun leerlingen grip hebben op de wiskundige processen? Valt het mijn studenten op dat er in de (digitale) methoden alleen naar getallen als antwoord gevraagd wordt en er vragen uit de hogere lagen van de indeling van Bloom zoals argumentatievragen over generalisaties ontbreken?

### EEN SPIEGEL WAT ONS ONDERWIJS ONZE LEERLINGEN/STUDENTEN LEERT OVER DE AARD VAN WISKUNDE

Een derde punt van kritiek betreft wat IPI Benny leert over de aard van wiskunde. Erlwanger schrijft wat dit volgens hem in zou moeten houden: 'mathematics is ... a rational and logical subject in which one has to reason, analyze, seek relationships, make generalizations, and verify answers' (p.19). Deze visie komt



Afbeelding 1. Wat leerlingen volgens wiskundigen zouden moeten leren over hun vakgebied (Hoffmann & Even, 2018, p.105)

overeen met wat leerlingen volgens nogal wat wiskundigen zouden moeten leren over hun vakgebied (Hoffmann & Even, 2018). Hoffmann en Evan presenteerden op de PME hun onderzoek naar wat wiskundigen vinden dat onderwezen zou moeten worden over de aard van wiskunde. Zij werkten dit uit in de een schematische weergave (afbeelding 1).

Ook Sinclair (2018) zegt iets soortgelijks in haar lezing over het toevoegen van esthetisch aspect aan de aard van wiskunde. Zij haalt Gutiérrez (2017) aan: ‘She therefore wants to bring together a European mathematics, which aims to generalise, predict, and explain, with aesthetic aspects that are about pleasure: “Mathematics is a way of seeking, acknowledging, and creating patterns for the purpose of solving problems (e.g. survival) and experiencing joy”’ (p. 58-59). Een dergelijke wiskunde is niet weggelegd voor de casus Benny, die Erlwanger beschrijft. Door de manier waarop IPI is ingericht, leert Benny dat ‘mathematics is to discover the rules and to use them to solve problems. There is only one rule for each type of problem, and he does not consider the possibility that there could be other ways of solving the same problem.’ (Erlwanger, 1973, p. 12). In het geval van Benny gaat het zelfs zo ver dat wanneer het programma aangeeft dat het gegeven antwoord onjuist is, Benny er vanuit gaat dat zijn procedure correct is, maar hij het antwoord niet in de juiste vorm heeft opgeschreven. Bijvoorbeeld als een half met een rechte breukstreep ( $1/2$ ) fout is, zal het antwoord waarschijnlijk  $0,5$  moeten zijn. Voor Benny bestaat rekenen uit het raden van de juiste procedures en daarna van de juiste wijze van invoeren van het antwoord. Volgens Erlwanger (1973) ziet Benny de aard van wiskunde als: ‘Therefore he has developed an inflexible, rule-oriented attitude toward mathematics. Mathematics for him merely consists of many rules for different kinds of problems.’ (p.21).

Erlwanger trekt een trieste conclusie over wat IPI bereikt. Omdat een computer slechts in staat is vooraf gedefinieerde antwoordmogelijkheden na te gaan, blijven de vragen beperkt tot het type dat tot een cijfermatig antwoord leidt. Opdrachten om mathematisch te leren denken, de kracht en schoonheid van wiskunde te leren waarderen en de ontwikkeling van wiskundige intuïtie te bevorderen, zijn uitgesloten (p.21). Dat roept de vraag op welke conclusie wij moeten trekken over het hedendaagse onderwijs. Wat is het gevolg van de huidige wens om onderwijsopbrengsten nauwkeurig in meetbare uitkomsten te beschrijven? Op welke plaats van de ranglijst staat Nederland wereldwijd als het gaat om het waarderen van de kracht en schoonheid van de wiskunde? En bestaat zo’n ranglijst eigenlijk? En is deze plaats ook onderwerp van discussie, zoals die bijvoorbeeld gevoerd wordt door het ministerie van OCW over de al dan niet afname van de kennis van onze leerlingen op het gebied van wiskunde? Hoeveel afstuderende pabo-studenten kunnen antwoord geven op de vraag hoe je wiskundige intuïtie bij kinderen ontwikkelt? Ik denk dat wat die laatste vraag betreft wij de hand in eigen boezem moeten steken, in ieder geval bij de KPZ waar ik zelf werk.

#### **WAT LEVERT HET BIJWONEN VAN EEN CONFERENTIE OP?**

Met het bijwonen van de PME was ik, inclusief heen en terugreis, een week zoet. Dat is nogal een tijdsinvestering en roept de vraag op of het dat waard is. Tijdens deze conferentie had ik letterlijk afstand genomen van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs. De conferentie bood me de kans om ook figuurlijk van een afstand naar het reken-wiskunde onderwijs in Nederland te kijken. Vertrekkend vanuit het meest recente onderzoek werd ik gewezen op lessen uit het verleden. Doorjagen zonder af en toe tijd te nemen om van een afstandje te kijken, kan ertoe leiden dat men zich voor een tweede keer aan dezelfde steen stoot. Of, zoals ik mijn studenten vertel: onderwijs ontwerpen zonder je te verdiepen in wat er door anderen al gedacht en geprobeerd is, ofwel zonder je in de theorie te verdiepen, kan leiden tot het opnieuw in valkuilen stappen waar anderen je al zijn voorgegaan, ondanks dat anderen al een niet mis te verstaan waarschuwingbord geplaatst hebben. Dus hoe vol onze agenda ook is, laten we de tijd nemen om conferenties te bezoeken. Wanneer iemand denkt te kunnen volstaan met het lezen van artikelen over conferenties zoals dit artikel, doet hij/zij zichzelf te kort.

---

**Literatuur**

- Boston, M. (2012). Assessing instruction quality in mathematics. *The Elementary School Journal*, 113(1), 76-104.
- Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *JCMB*, 1(2), 7-26.
- Exova (2018). Visie. geraadpleegd van <https://exova.nl/over-ons/>, op 11-7-2018
- Gutiérrez, R. (2017). Living mathematx: Towards a vision for the future. *Philosophy of Mathematics Education*, 32, 1–34.
- Hoffmann, A. & Even, R. (2018). What do mathematicians wish to teach teachers in secondary school about mathematics? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 99-106). Umeå, Sweden: PME.
- Lindvall, C. M. and Cox, R.C . (1970). *The IPI Evaluation Program. AERA Monograph Series on Curriculum Evaluation*, No. 5. Chicago: Rand McNally and Company.
- Niss, M. (2018). The very multi-faceted nature of mathematics education research. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 35-50). Umeå, Sweden: PME.
- Sinclair, N. (2018). An aesthetic turn in mathematics education. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 51-66). Umeå, Sweden: PME.

*Some questions need to be posed time after time, even if the words and focus differ over time. These questions are central to this paper. Questions are formulated on the occasion of a conference visit. The questions include 'What type of research on mathematics education is desired?', 'What are issues when education becomes individualized?', 'What should be education's focus?' and 'What nature of mathematics for students is reflected in our education?'. Some of these questions are old but at the same time questions of this timeframe, like: 'Are current research standards a limitation for valuable forms of research?', 'Is the discourse in classrooms where each students individually works with digital materials vivid or dumbfounded?', 'Are student teachers aware that student assignments often focus on the answer as a number only, and that in these situations higher Bloom-levels are missing?' and 'What is the worldwide ranking of The Netherlands when it comes to the power and beauty of mathematics?'*